Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2019/2020

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 10

Ausgabe: 18.12.2019
Abgabe: 15.01.2020

Aufgabe 10.1. Dominating Set (2 + 4 Punkte)

Wir modellieren den d-dimensionalen Würfel als Graphen $W_d(V, E)$, wobei jede Ecke des Würfels einem Knoten in W_d entspricht. Jede Ecke wird dabei durch einen binären Vektor der Länge d dargestellt. Somit gilt $V = \{0, 1\}^d$. Zwei Knoten $x, y \in \{0, 1\}^d$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich x und y in exakt einem Eintrag unterscheiden.

a) Zeige, dass in $W_d(V, E)$ eine dominierende Knotenmenge *(dominating set)* $D \subseteq V$ mindestens $\frac{2^d}{d+1}$ Knoten hat.

b) Konstruiere eine optimale dominierende Knotenmenge D im 4-dimensionalen Würfel W_4. Begründe die Optimalität und die Korrektheit deiner Lösung D.

Aufgabe 10.2. (4 + 5 Punkte)

Wir betrachten das Feedback Vertex Set Problem:

Eingabe: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: eine Knotenmenge $S \subseteq V$ mit minimalem Gesamtgewicht, sodass jeder (*einfache*) Kreis $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, v_l = v_1)$ in G mindestens einen Knoten aus S enthält. (Ein Kreis heißt *einfach*, wenn keiner seiner Knoten mehrmals durchlaufen wird.)

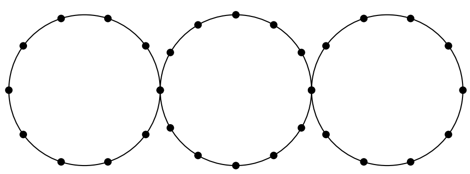
Das folgende LP ist eine LP-Relaxierung des Problems (für eine gegebene Instanz):

$$
\begin{array}{llrcll}
 & \text{Minimiere} & \sum\limits_{v\in V} w_v x_v & & & \\
\text{(P)} & \text{sodass} & \sum\limits_{v\in C} x_v & \geqslant & 1 & \text{für alle } C \in \mathcal{K} \\
 & & x_v & \geqslant & 0 & \text{für alle } v \in V
\end{array}
$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{K}$ die Menge aller einfachen Kreise von G.

a) Bestimme das duale LP (D), und versuche dieses grob zu interpretieren.

b) Sei im folgenden Graphen jedes Knotengewicht $w_v = 1$. Bestimme drei verschiedene duale Lösungen y, sodass keine duale Variable (einzeln) höher gesetzt werden kann. Eine optimale Lösung soll auch dabei sein, mit kurzer Begründung der Optimalität.



Bitte wenden!

Aufgabe 10.3. ((2 + 2) + 4 Punkte)

a) Wir definieren eine bivariate Funktion $f\colon S \times T \to \mathbb{R}$, wobei (hier) $S = T = \{1, 2\}$ gilt. Bestimme Funktionswerte $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(2,1)$ und $f(2,2)$, sodass jede Zahl aus $\{4,5,6,7\}$ genau einem Paar zugewiesen wird und

   i) $\max\limits_{y\in T}\left(\min\limits_{x\in S} f(x,y)\right) = \min\limits_{x\in S}\left(\max\limits_{y\in T} f(x,y)\right)$

   ii) $\max\limits_{y\in T}\left(\min\limits_{x\in S} f(x,y)\right) \neq \min\limits_{x\in S}\left(\max\limits_{y\in T} f(x,y)\right)$

b) Zeige, dass für beliebige endliche S, T und beliebige $f\colon S \times T \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\max_{y\in T}\left(\min_{x\in S} f(x,y)\right) \leqslant \min_{x\in S}\left(\max_{y\in T} f(x,y)\right)$$

Hinweis: Sei die linke Seite gleich $f(x_1, y_1)$ und die rechte Seite gleich $f(x_2, y_2)$. Verwende $f(x_1, y_2)$ oder $f(x_2, y_1)$ für den Beweis.

Aufgabe 10.4. *Der Handlungsreisende* (3 + 3 Bonuspunkte)

Ein Handlungsreisender bekommt den Auftrag durch n Städte zu reisen. Beim Betrachten der Karte stellt er fest, dass drei Rundreisen (nicht unbedingt minimaler Länge) existieren, die gemeinsam die gesamte Karte überdecken: Würde er allen drei Rundreisen folgen, würde er insgesamt jeden direkten Weg zwischen je zwei Städten (Kante) genau einmal durchfahren.

a) Bestimme die Anzahl der Städte n. Begründe deine Antwort.

b) Beschreibe eine Möglichkeit für die drei Rundreisen.

Aufgabe 10.5. Facility Location (5 Bonuspunkte)

Wir betrachten das diskrete unendliche Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Instanz für Facility Location. Jeder Gitterpunkt entspricht hierbei einem Kunden und darf gleichzeitig als eine Service-Station s mit Betriebskosten $f_s = 2$ gewählt werden ($S = K = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$). Die Distanz zweier Gitterpunkte ist die Distanz entlang vertikaler und horizontaler Gitterlinien, d. h. es gilt:

$$d\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$$

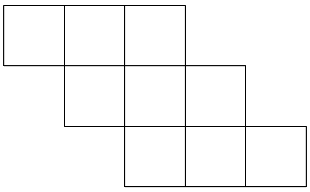
Finde eine optimale Auswahl $X \subseteq S$ an Service-Stationen, d. h. ein X, welches die durchschnittlichen Kosten pro Gitterpunkt minimiert.

Hinweis: Beachte, dass in jeder Lösung X ein Punkt mit Distanz $\geqslant 2$ von X zur Service-Station deklariert werden kann, ohne zusätzliche Kosten zu verursachen. Bestimme die bestmögliche Häufigkeit an Stationen und finde hierfür eine geeignete Positionierung. Es ist ausreichend, die Optimalität der Lösung mit Hilfe dieser Überlegung zu begründen.

Bitte wenden!

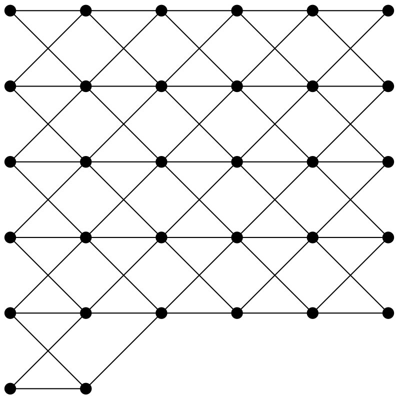
Aufgabe 10.6. (3 Bonuspunkte)

Schreibe die Zahlen 1 bis 9 in die unten dargestellten Kästchen, sodass keine aufeinanderfolgenden Zahlen in derselben Zeile, Spalte oder Diagonale vorkommen. Welches schwierige Problem aus der Graphentheorie steckt in diesem Rätsel?



Aufgabe 10.7. (4 Bonuspunkte)

Der hier abgebildete Graph modelliert die Positionen der Sitzplätze in einem Klassenraum. Zwei Plätze sind genau dann mit einer Kante verbunden, wenn die Schüler auf diesen Plätzen voneinander abschreiben können. Die Klasse schreibt morgen eine Mathe-Arbeit. Können sich die 8 Schüler, die sich mit dem Stoff auskennen, so positionieren, dass jeder eine 1 schreibt?



Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`https://ae.cs.uni-frankfurt.de/?p=teaching&s=teaching&t=L_19_WS_APPROX`

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`