Mathe auswendig (wird gefragt)

Die Erklärungen sind als Hilfe da und werden nicht gefragt.

1. Die Anzahl verschiedener Reihenfolgen (**Permutationen**) von n Elementen ist

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

   [Warum? Schreibe alle auf für $n = 5$.]

2. Die Anzahl k-elementiger Teilmengen von n Elementen ist n **über** k

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

   Insbesondere gibt es $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ 2-elementige Teilmengen.

   [Warum? Beim Aufschreiben haben wir jetzt $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten, aber dann haben wir jede k-elementige Teilmenge in allen möglichen Reihenfolgen also $k!$-mal mitgezählt. (n über k heißt auch Binomialkoeffizient, siehe nächsten Punkt.)]

3. Die Anzahl *aller* Teilmengen ist dann

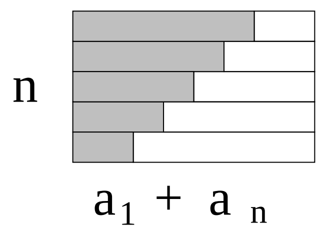
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

   [Warum? Zwei Beweise: Erstens, folgt die Identität auch aus der binomischen Lehrsatz mit $(1+1)^n$. Zweitens, jeder Teilmenge entspricht ein n-langer Bitvektor, in dem genau an den Stellen eine 1 steht deren Indizes die Teilmenge bilden. Es gibt 2^n Bitvektore der Länge n und deshalb 2^n Teilmengen.]

4. **Arithmetische Summe.** Wenn die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Elemente einer Summe gleich ist, dann ist die Summe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Insbesondere gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}$.



5. **Geometrische Summe**

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

[weil $(1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)})$ Teleskopsumme ist und 'deshalb' $1 - q^n$ ergibt]

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (-1 < q < 1)$$

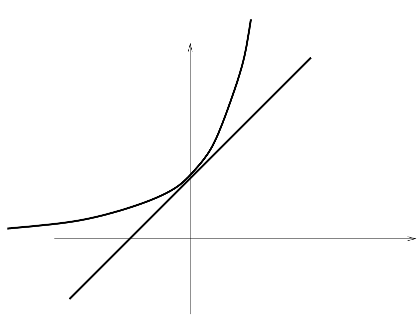
[weil in der Formel $q^n \to 0$]

Insbesondere gilt $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 2$

Multipliziert man beide Seiten mit einem (Startelement) $a \neq 1$, erhält man ähnliche Regel für beliebige geometrische Folgen.

6.

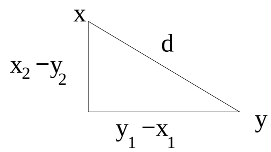
$$1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



7. **Euklidsche Distanz in $\mathbb{R}^n$** der Punkte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

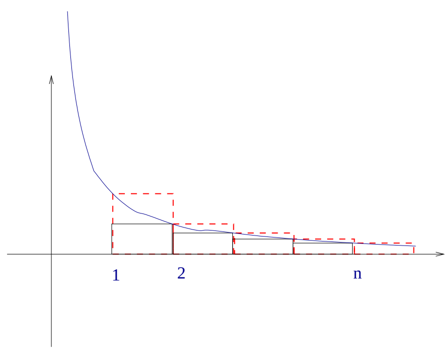
[wegen Pythagoras]



8. **die n-te Harmonische Zahl**

$$\ln n < H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

[weil $\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < H_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n$]



9. **Fibonacci Folge/Zahlen**

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$$

der Quotient aufeinander folgender Elemente geht gegen ϕ den sog. Goldenen Schnitt

10. **Der Goldene Schnitt** ist das Verhältnis so dass $\frac{\phi}{1} = \frac{1+\phi}{\phi}$ gilt.

ϕ kommt überall in der Natur, Kunst, Literatur, Musik etc. vor. (An dieser Stelle 'des Stücks' gibt es etwas neues oder wichtiges.) [$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$]