LINEARE PROGRAMMIERUNG

Definition (kanonische Form)

Beispiel

Minimiere $2x_1 - x_2 + 4x_3$ *(lineare Zielfunktion)*

so dass

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &\leq 2 \\ 3x_2 - x_3 &= 5 \\ x_3 + x_4 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

(lineare Nebenbedingungen)

Gesucht wird eine belegung der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 die die Nebenbedingungen erfüllt, und die Zielfunktion minimiert.

(Linear Program, LP)

Ein allgemeines lineares Programmierproblem

Seien $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c, a_i \in \mathbb{Q}^n$,

M_1, M_2, M_3 eine Partition des $\{1, 2, \ldots, m\}$ und $N_1, N_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Wir betrachten Optimierungsprobleme der Form:

Minimiere/Maximiere $c^T \cdot x$ so dass

$$\begin{aligned} a_i^T \cdot x &\geq b_i & i \in M_1 \\ a_i^T \cdot x &= b_i & i \in M_2 \\ a_i^T \cdot x &\leq b_i & i \in M_3 \\ x_j &\geq 0 & j \in N_1 \\ x_j &\leq 0 & j \in N_2 \end{aligned}$$

Definition:

Lineares Programm in *kanonischer Form:*

Minimiere $c^T \cdot x$ so dass $A \cdot x \geq b$

(hier $x^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$)

Beobachtung: Jedes LP hat ein äquivalentes LP in kanonischer Form.

$\Rightarrow$ die kanonische Form ist allgemein genug!

Die kanonische Form für unser erstes Beispiel:

$$\text{Minimiere} \quad [2,-1,4,0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c^T \cdot x \quad \text{so dass}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x \quad \geq \quad b$$

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Anwendungsbeispiele

Beispiel 1: Produktionsplanung

(ein ökonomisches Problem)

Eine Firma herstellt n verschiedene Produkte
aus m verschiedenen Rohstoffen.

- von Rohstoff i steht eine Menge von b_i zur Verfügung;
- *eine Einheit* von Produkt j braucht a_{ij} von Rohstoff i;
- und erzeugt den Erlös c_j.

Formulierung als LP:

gesucht wird x_j die zu produzierende Menge des Produkt j;

Maximiere $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ so dass $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ für jeden Rohstoff i.

Beispiel 2: Vertex Cover

Verschiedenste Optimierungsprobleme können als *ganzzahlige* Programme formuliert werden!

Sei G ein Graph mit $V = \{1, 2, \ldots n\}$ Knotengewichten w_v, und $C \subseteq V$ die gesuchte Knotenüberdeckung.

Formulierung als ganzzahliges Programm (*Integer Program, IP*):

Beabsichtigte Interpretation der Variablen

$$x_v = 1 \Leftrightarrow v \in C \qquad x_v = 0 \Leftrightarrow v \notin C$$

- Minimiere $\sum_{v=1}^{n} x_v w_v$
- so dass $x_v + x_u \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$
- $x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V$

Das IP ist 'richtig', aber nicht polynomiell lösbar

Formulierung als LP:

- Minimiere $\sum_{v=1}^{n} x_v w_v$
- so dass $x_v + x_u \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$
- und $0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V$

Das LP erlaubt also fraktionale Lösungen... Aber: es ist effizient lösbar!

Die LP-Formulierung heißt eine *Relaxierung* der IP-Formulierung.

Durch das Lösen von LP werden wir eine 2-Approximation erhalten...

Beispiel 3: Gewichtetes Matching

Für $G(V, E)$ mit Kantengewichten w_e,
finde ein Matching $M \subseteq E$ (ohne gemeinsame Endknoten)
mit maximalem Gewicht

Formulierung als LP (Relaxierung):

Beabsichtigte Bedeutung der Variablen x_e ist

$x_e = 1$ wenn $e \in M$ und $x_e = 0$ sonst.

- Maximiere $\sum_{e \in E} x_e w_e$
- so dass

$$\sum_{u, \{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \leq 1 \qquad \forall v \in E$$

- und $0 \leq x_e \leq 1 \qquad \forall e \in E$

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Geometrische Grundlagen

Geometrie in $\mathbb{R}^2$

Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, ein Vektor von Variablen und $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a^T \cdot x = 0\}$ ist eine zu a orthogonale Gerade die den $\mathbf{0}$ enthält
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a^T \cdot x > 0 \quad (\text{bzw. } a^T \cdot x < 0)\}$ ist eine offene Halbebene
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a^T \cdot x \geq 0 \quad (\text{bzw. } a^T \cdot x \leq 0)\}$ ist eine abgeschlossene Halbebene
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a^T \cdot x = b\}$ ist eine *affine* Gerade, parallel zur Gerade $a^T \cdot x = 0$

Zusammenfassung, Verallgemeinerung

(an $\mathbb{R}^3$ denken...)

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, usw. sind Vektoren, bzw. ihre Endpunkte in $\mathbb{R}^n$
- $a^T \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = |a||x| \cos\gamma$, wobei γ der Winkel zwischen a und x ist
- $a^T \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a$ und x sind *orthogonal*

– die zu a orthogonale Vektoren $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = 0\}$
formen eine Hyperebene (in $\mathbb{R}^3$ ist das eine Ebene)

– Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x = b\}$ ist eine (affine) Hyperebene

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \geq b\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T \cdot x \leq b\}$

sind (abgeschlossene) Halbräume

Die Lösungsmenge (Lösungsraum) eines linearen Programms

Definition 1:

Sei $A \cdot x \geq 0$ ein lineares Programm mit Zielfunktion $c^T \cdot x$.

Ein Vektor x mit $A \cdot x \geq b$ heißt eine *Lösung*.

Das LP ist *lösbar* wenn lösungen existieren, und *unlösbar* sonst.

Die *Lösungsmenge* ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \geq b\}$.

Definition 2: Einen Durchschnitt von Halbräumen nennt man *Polyeder* (wenn er beschränkt ist, nennt man ihn auch *Polytop*).

Beobachtung: Die Lösungsmenge ist ein Polyeder, weil sie der Durchschnitt der Halbräume $\{x \mid a_i^T \cdot x \geq b_i\}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ ist.

Beispiel

Minimiere $-x_1 - x_2$

so dass

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Die Ecken der Lösungsmenge

Ecken: Definition 1

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Lösungspolyeder.

Definition 1: $x^* \in P$ ist eine *Ecke*, wenn in x^* n (linear unabhängige) Nebenbedingungen *exakt* erfüllt werden.

(d.h. die entsprechenden a_i^T Vektoren in den Bedingungen sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$)

Beachte: Wir brauchen also n unabhängige Bedingungen damit P *überhaupt* Ecken hat!

(Bemerkung:)

Es gibt $< n$ unabhängige Bedingungen

$\Updownarrow$

der Lösungspolyeder enthält eine Gerade

$\Downarrow$

es gibt keine Ecke, und das folgende Theorem *gilt nicht*

Ecken: Definition 2

Definition 2: $x^* \in P$ ist eine *Ecke*, wenn es *keinen* Vektor $y \neq 0$ gibt mit $x^* + y \in P$ und $x^* - y \in P$.

Theorem: Wenn für ein LP mit n Variablen und n linear unabhängigen Nebenbedingungen ein endliches Optimum existiert, dann gibt es eine optimale Ecke des Lösungspolyeders.

Definition: Zwei Ecken $x^*, x^{**} \in P$ sind *benachbart*, oder *adjazent*, wenn es $n-1$ Bedingungen gibt, die x^* und x^{**} beide exakt erfüllen.

Definition: Eine Ecke $x^* \in P$ ist *entartet*, wenn in x^* mehr als n Nebenbedingungen exakt erfüllt werden.

(natürlich nicht unabhängige)

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Lineare Programme in Standardform

Definition:

Lineares Programm in *Standardform:*

Minimiere $c^T \cdot x$ so dass $A \cdot x = b$ und $x \geq 0$

(hier $x^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$)

Beobachtung: Jedes lineare Programm in kanonischer Form, hat ein äquivalentes lineares Programm in Standardform.

$\Rightarrow$ die Standardform ist auch allgemein genug!

Beispiel

Minimiere $2x_1 + 4x_2$

so dass

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 14 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die äquivalente Standardform:

Minimiere $2x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^-$

so dass

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_1 = 3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- &= 14 \\ x_1 &\geq 0 \\ s_1 &\geq 0 \\ x_2^+ &\geq 0 \\ x_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Geometrische Darstellung der Standardform

Sei $A \cdot x = b, \quad x \geq 0$ ein LP in Standardform, mit n Variablen und m unabhängigen Gleichungen $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$.
Der Lösungspolyeder (falls nichtleer) ist $n - m$ dimensional.

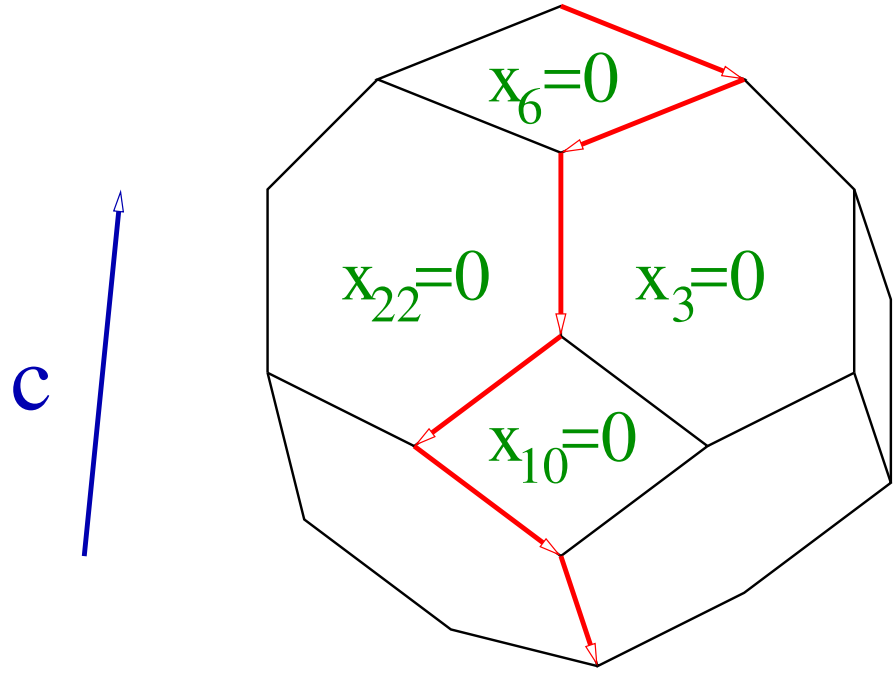
[Jede Gleichung in $A \cdot x = b$ nimmt einen Freiheitsgrad (eine Dimension) weg.]

$\rightarrow$ Wir werden Beispiele mit $n - m = 2$ und $n - m = 3$ geometrisch darstellen.

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Der Simplex-Algorithmus

Die Grobstruktur des Simplex-Algorithmus



1. Wähle eine beliebige Ecke x^* des Lösungspolyeders
2. Bestimme eine benachbarte Ecke x^{**} mit niedrigerem Zielwert
3. Falls keine existiert, gib x^* als optimale Lösung aus; sonst setze $x^* := x^{**}$ und GOTO 2.

Simplex wendet lokale Suche an.

Die gefundene lokal optimale Lösung ist sogar global optimal!

[Einige algebraische Details]

Eingabe: ein LP in Standardform

1. von x^* laufen wir entlang einer 'Kante' über Lösungen $x^* + \lambda d$ (B is die Menge der Indizes i mit $x_i \neq 0$).

   (hier $d_j = 1$ für eine $j \notin B$, und $d_B = -A_B^{-1} \cdot a^j$)

2. Welche $j \notin B$ (Richtung) nehmen wir?

   der Zielwert wächst um $\lambda c^T \cdot d = \lambda(c_B^T \cdot d_B + c_j) =: \lambda \tilde{c}_j$

   Theorem: Wenn $\tilde{c}_j \geq 0$ für jede $j \notin B$, dann wächst der Zielwert in jeder Richtung $\Rightarrow$ in jeder Lösung $x \in P$, $\Rightarrow$ x^* war minimal.

[Weiter...]

Sonst wähle die *kleinste* $j \notin B$ mit $\tilde{c}_j < 0$

(Diese *smallest subscript rule* schließt *cycling* aus!)

Sei diese j fixiert:

- falls $d_B \geq 0$ dann $x^* + \lambda d \geq 0$
  wir können unendlich weiterlaufen und $\min c^T \cdot x = -\infty$

- sonst existiert $\lambda_{\max}$ maximal so dass $x^* + \lambda d \geq 0$

  setze $x^{**} = x^* + \lambda_{\max} d$

  bei $\lambda_{\max}$ gibt es eine neue k mit $x_k^{**} = 0$
  (k wird gegen j ausgetauscht in der Basis B)

Laufzeit

- In jeder Iteration (neue Ecke) werden Matrizen invertiert und multipliziert in Laufzeit Poly(n, m)
- Simplex kann aber im Worst-Case $\mathcal{O}(2^n)$ Ecken durchlaufen! (zB. die Ecken eines verzerrten Würfels)
- Exponentielle Laufzeit *im Worst-Case*: $\mathcal{O}(\mathrm{Poly}(n) \cdot 2^n)$
- Jedoch wird Simplex in der Praxis erfolgreich angewandt.

Geschichte

- 1947 (Dantzig): Simplex Algorithmus
- 1979 (Khachiyan): Ellipsoid-Methode

  (erster polynomieller Algorithmus; nicht praktisch)
- 1984 (Karmarkar): Interior-Point Methode

  (für große LP-s; approximative Lösungen)

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Lineare Programmierung und Approximation

"In general it is not known what properties of integer programs allow approximation with an arbitrary ε, a fixed ε, or no approximation at all. This is an active research area."

Deterministisches Runden

Beispiel 1: min-VERTEX COVER

Sei G ein Graph mit $V = \{1, 2, \ldots n\}$, Knotengewichten w_v, und $C \subseteq V$ die gesuchte Knotenüberdeckung.

LP-Relaxierung:

Beabsichtigte Interpretation der Variablen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist $x_v = 1$ wenn $v \in C$ und $x_v = 0$ sonst.

- Minimiere $\sum_{v=1}^{n} x_v w_v$
- so dass $x_v + x_u \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$
- und $0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V$

Ein Approximationsalgorithmus

deterministisches Runden

- löse die LP Relaxierung;
  sei $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ die optimale fraktionale Lösung

- setze $v \in C \qquad \Leftrightarrow \qquad x_v^* \geq 1/2$

Dann ist C eine 2-approximative Knotenüberdeckung!

(Übrigens: jede Ecke hat Koordinaten in $\{0, 1/2, 1\}$)

Beispiel 2: max-INDEPENDENT SET

Eingabe: $G(V, E)$

Ausgabe: unabhängige Knotenmenge $I \subset V$ maximaler Grösse
$(u, v \in I \Rightarrow \{u, v\} \notin E)$

LP-Relaxierung:

- Maximiere $\sum_{v=1}^{n} x_v$
- so dass $x_v + x_u \leq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$
- und $0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V$

Beobachtung: Es gibt fraktionale Lösungen, die um den Faktor $\Omega(n)$ besser sind als $\max |I|$

(zB. für den vollständigen Graphen die Lösung $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$)

Vollständig unimodulare Programme

Beispiel 3: max-MATCHING

Für $G(V, E)$ mit Kantengewichten w_e,
finde ein Matching $M \subseteq E$ (Kanten ohne gemeinsame Endknoten)
mit maximalem Gewicht

LP-Relaxierung:

Beabsichtigte Bedeutung der Variablen x_e ist

$x_e = 1$ wenn $e \in M$ und $x_e = 0$ sonst.

- Maximiere $\sum_{e \in E} x_e w_e$
- so dass

$$\sum_{u, \{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \leq 1 \qquad \forall v \in V$$

- und $0 \leq x_e \qquad \forall e \in E$

Vollständig unimodulare Matrizen (ohne Beweis)

Definition: Die Matrix A ist *vollständig unimodular*, wenn $\det B \in \{-1, 0, 1\}$ für *jede* quadratische *Teilmatrix* B von A gilt.

(insb. sind alle Einträge 1, -1 oder 0)

Theorem: Wenn A vollständig unimodular, und b ganzzahlig ist, dann haben die Ecken der Lösungspolyeder $\{x \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ bzw. $\{x \mid A \cdot x \geq b\}$ nur ganzzahlige Koordinaten.

Behauptung: Die Inzidenzmatrix für einen Graphen ist vollständig unimodular dann und nur dann, wenn der Graph bipartit ist.

Korollar: Das max-MATCHING Problem auf bipartiten Graphen ist (auch) mit linearer Programmierung exakt lösbar.

Randomisiertes Runden

Beispiel: 4. Das MAX-SAT Problem

Eingabe: eine Menge K von *Klauseln* mit *Literalen* aus $\{x_1, \neg x_1, \ldots, x_n, \neg x_n\}$
wobei Klausel k das Gewicht w_k besitzt

Ausgabe: Eine Wahrheitsbelegung die eine Klauselmenge mit größtmöglichem Gesamtgewicht erfüllt.

ALG1: Eine 2-Approximation ist einfach. (Warum?)

ALG2: Randomisierung für lange Klauseln

FOR $i = 1$ TO n DO

- setze $x_i = \mathrm{TRUE}$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$,
  und $x_i = \mathrm{FALSE}$ sonst

Beobachtung 1: Eine Klausel der Länge ℓ wird mit Wahrscheinlichkeit $1 - 1/2^\ell$ erfüllt.

Beobachtung 2: Wenn jede Klausel mindestens ℓ Literale besitzt, dann ist das *erwartete* Gewicht erfüllter Klauseln

$$\geq (1 - 1/2^\ell) \cdot W_{\mathrm{OPT}}.$$

IP-Formulierung

Interpretation: y_i ist die Belegung von x_i;

$z_k = 1$ falls Klausel k erfüllt ist, und $z_k = 0$ sonst

Maximiere $\sum_{k \in K} w_k z_k$

so dass $\sum_{x_i \in k} y_i + \sum_{\neg x_j \in k} (1 - y_j) \geq z_k \qquad \forall k \in K$

$y_i, z_k \in \{0, 1\}$

ALG3: Randomisiertes Runden für kurze Klauseln

- löse die LP-Relaxierung $\quad 0 \leq z_k \leq 1 \quad 0 \leq y_i \leq 1$;

  sei (y^*, z^*) eine optimale fraktionale Lösung

- setze $x_i = \mathrm{TRUE}$ mit Wahrscheinlichkeit y_i^*

ALG4: Kombiniere ALG2 mit ALG3

- Bestimme eine Wahrheitsbelegung mit ALG2
- Bestimme eine Wahrheitsbelegung mit ALG3
- gib die bessere Lösung aus!

Theorem: Das *erwartete* Gewicht belegter Klauseln ist

$$\geq \frac{3}{4} \sum_{k \in K} w_k z_k^* \geq \frac{3}{4} \mathrm{OPT}.$$

Die Integralitätslücke

... ist der größtmögliche Quotient des ganzzahligen und des fraktionalen Optimums für ein gegebenes Problem.

Sei I eine konkrete Instanz eines Minimierungsproblems

- sei $OPT(I)$ das (ganzzahlige) Optimum
- sei $OPT_{\text{frac}}(I)$ das (fraktionale) Optimum der LP-Relaxierung
- für Minimierungsprobleme gilt $OPT_{\text{frac}}(I) \leq OPT(I)$

Definition: Die *Integralitätslücke (integrality gap)* ist der größte Quotient über alle Instanzen

$$\sup_I \frac{OPT(I)}{OPT_{\text{frac}}(I)}$$

(bei Maximierungsproblemen

$$\sup_I \frac{OPT_{\text{frac}}(I)}{OPT(I)})$$

Beispiel 5: Das SET COVER Problem

Eingabe: n Teilmengen $S_j \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$
mit Gewichten $w_j \quad j = 1, 2, \ldots n$

Ausgabe: eine Überdeckung der $\{1, 2, \ldots, m\}$ mit einer leichtesten Auswahl $\{S_j \mid j \in C\}$ der Teilmengen.
($C \subset \{1, \ldots n\}$ sind die Indizes der ausgewählten Mengen S_j)

IP-Formulierung

IP-Formulierung:

(Interpretation: $x_j = 1$ falls $j \in C$ und $x_j = 0$ sonst)

- Minimiere $\sum_{j=1}^{n} x_j w_j$
- so dass $\sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1 \quad$ für $i = 1, 2, \ldots m$
- und $x_j \in \{0, 1\}$

LP-Relaxierung: $\quad 0 \leq x_j \, (\leq 1)$

Beobachtung

- SET COVER ist eine *Verallgemeinerung* von VERTEX COVER, wobei die Mengen S_j den Knoten entsprechen.

- Insbesondere ist jedes 'Element' (Kante) in höchstens zwei 'Mengen' (Knoten) enthalten, und deterministisches Runden ergibt eine 2-Approximation.

Deterministisches Runden

Falls jedes Element in höchstens ℓ Teilmengen enthalten ist...

dies ergibt eine ℓ-approximative Mengenüberdeckung.

Greedy Algorithmus für SET COVER

Die Variante für ungewichtete Teilmengen:

- Setze $C = \emptyset$;
- WHILE es nicht überdeckte Elemente gibt, DO
  - Setze $C = C \cup \{j\}$ falls S_j die meisten neuen Elemente überdeckt.

Die formale Version für gewichtete Teilmengen: (U ist die Menge bereits überdeckter Elemente)

- $C := \emptyset \quad U := \emptyset$
- WHILE $U \neq \{1, 2, \ldots, m\}$ DO
  - bestimme eine Menge S_k mit

$$\frac{S_k \setminus U}{w_k} = \max_{j \notin C} \frac{S_j \setminus U}{w_j}$$

  - $U := U \cup S_k \qquad C := C \cup \{k\}$

Theorem: Der Greedy Algorithmus für SET COVER ist $(1 + \ln m)$-approximativ.

Randomisiertes Runden für SET COVER

1. sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine optimale fraktionale Lösung

2. FOR $t = 1$ to T DO
   - FOR $j = 1$ to n DO:
     nimm S_j mit Wahrscheinlichkeit x_j in die Mengenüberdeckung C_t

3. Gib $C = \bigcup_{t=1}^{T} C_t$ als Überdeckung aus.

Theorem: Für $T = \ln m + 1$ erhalten wir eine vollständige Überdeckung mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$.

Die Überdeckung hat *erwartetes* Gewicht $\leq W_{\mathrm{OPT}} \cdot (\ln m + 1)$.

Definition: die Klasse $f(n)$-$\mathcal{APX}$

$f(n)$-$\mathcal{APX}$ ist die Klasse von Problemen mit einem effizienten $\mathcal{O}(f(n))$-approximativen Algorithmus (für Eingabelänge n).

poly-$\mathcal{APX}$ ist die Klasse von allen Problemen aus $q(n)$-$\mathcal{APX}$ für irgendein Polynom $q(n)$.

Zusammenfassung/Nicht-Approximierbarkeit

Wir kennen Probleme aus den folgenden Problemklassen gemäß effizienter Approximierbarkeit (angenommen $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$):

$\mathcal{NPO}$ das allgemeine TRAVELLING-SALESMAN-PROBLEM ist nicht effizient approximierbar (z.B. nicht 2^n-approximierbar)

(wir haben dies durch eine Reduktion von HAMILTONSCHER-KREIS nachgewiesen)

$\Rightarrow$ 0-1 PROGRAMMIERUNG ist nicht approximierbar.

n-$\mathcal{APX}$ max-CLIQUE und max-INDEPENDENT-SET sind nicht polynomiell approximierbar mit Faktor $\leq n^{1-\epsilon}$

(diese Probleme lassen sich leicht ineinander transformieren)

log-$\mathcal{APX}$ (sehr wahrscheinlich) min-SET-COVER ist nicht polynomiell approximierbar mit Faktor $\leq (1-\varepsilon) \ln m$
(m ist die Anzahl der Elemente)

($\Rightarrow$ der Greedy Algorithmus ist optimal!)

Diese weiter enthalten die Approximations-Klassen:

$\mathcal{APX}$ Es ist jeweils eine $\alpha > \beta > 1$ bekannt, so dass die folgenden α-approximierbar aber nicht β-approximierbar sind:

min-VERTEX-COVER ($\beta \approx 1.36$; (VERMUTUNG: $\beta = 2 - \varepsilon$));
Δ-TSP ($\beta = 220/219$), BIN-PACKING, k-CENTER ($\beta = 2 - \varepsilon$, Reduktion von DOMINATING SET), FACILITY LOCATION, k-MEDIAN

$\Rightarrow$ sie alle besitzen kein PTAS.

$\mathcal{PTAS}$ min-SCHEDULING, EUKLIDSCHES TSP, BIN-PACKING (asymptotisch)

$\mathcal{FPTAS}$ min-SCHEDULING-m, RUCKSACK

$\mathcal{PO}$ LINEARE PROGRAMMIERUNG, max-MATCHING, min-SPANNBÄUME KÜRZESTE WEGE, min-PRÄFIX-CODE

Beispiel 3: Ein ROUTING Problem

Eingabe: ein gerichteter graph $\vec{G}(V, E)$ mit ausgezeichneten Knoten
$s_1, s_2, \ldots, s_r$ (*Quellen*)
$t_1, t_2, \ldots, t_r$ (*Senken*)

Ausgabe: bestimme Wege $P_1, P_2, \ldots P_r$, so dass
P_i in s_i beginnt und in t_i endet,
und die maximale Belastung einer Kante minimiert wird.

(Belastung(e)= Anzahl der P_i die über e laufen.)

IP-Formulierung

Variablen: $x_i(e)$ für $1 \leq i \leq r$ und $e \in E$

Interpretation: $x_i(e) = 1$ wenn P_i über e läuft, und 0 sonst

Bedingungen B_i für Pfad i :

$$\sum_{e \text{ endet in} w} x_i(e) - \sum_{e \text{ startet in} w} x_i(e) = 0 \quad \forall w \in V$$

$$\sum_{e \text{ endet in} s_i} x_i(e) - \sum_{e \text{ startet in} s_i} x_i(e) = -1$$

$$\sum_{e \text{ endet in} t_i} x_i(e) - \sum_{e \text{ startet in} t_i} x_i(e) = 1$$

Minimiere W so dass $\sum_{i=1}^{r} x_i(e) \leq W \quad \forall e \in E$

und die Bedingungen B_i gelten für jedes i

LP-Relaxierung:

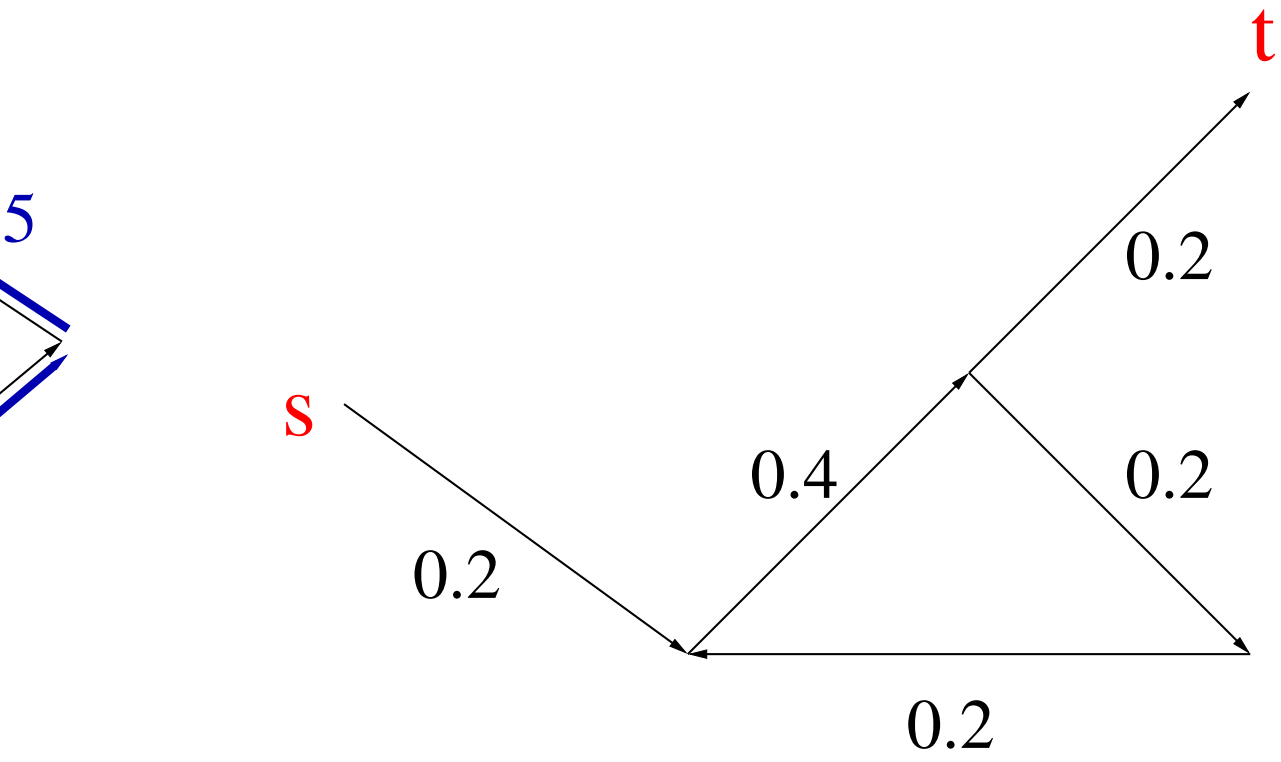
Fordere $0 \leq x_i(e) \leq 1$ (statt $x_i \in \{0, 1\}$)

Definition: Ein Fluss von s nach t ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass die *Flusserhaltung* (Bedingungen B_i) gilt;

(und generell, auch vorgegebene Kapazitätsschranken $f(e) \leq c(e)$ eingehalten werden).

Eine optimale *fraktionale* Lösung bestimmt jeweils einen Fluss x_i mit Wert 1 von s_i nach t_i. Mit (Gesamt-)Kapazität W für jede Kante.

Pfad-Zerlegung (*path-decomposition*)



sei x^* eine optimale fraktionale Lösung

Sei i fixiert, und

G_i der Teilgraph aller Kanten mit $x_i^*(e) > 0$;

Es gibt maximal $|E|$ Iterationen

Pfad-Zerlegung (*path-decomposition*)

sei $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*\}$ eine optimale fraktionale Lösung

Sei x_i^* fixiert.

$k := 1$
REPEAT

- sei G_i der Teilgraph aller Kanten mit $x_i^*(e) > 0$;
- nimm einen Pfad $P_{i,k}$ von s_i nach t_i
- sei $\alpha_{i,k} = \min_{e \in P_{i,k}} x_i^*(e)$
- reduziere $x_i^*(e)$ um $\alpha_{i,k}$ entlang $P_{i,k}$
- $k := k + 1$;

UNTIL es keinen Weg von s_i nach t_i gibt.

Routing durch randomisiertes Runden

- Für jedes i zerlege x_i^* in die Pfade $P_{i,1}, P_{i,2}, \ldots, P_{i,r}$ mit Werten

  $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,r}$;

- es gilt $\sum_j \alpha_{i,j} = 1$; setze $P_i := P_{i,j}$ mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_{i,j}$

Beobachtung: Für fixierte $e \in E$ ist

$$\mathbb{E}(\text{Belastung}(e)) \leq W_{\text{OPT}}^{\text{frac}} \leq W_{\text{OPT}}.$$

Beweis: es gilt

$$\sum_{j : e \in P_{i,j}} \alpha_{i,j} \leq x_i^*(e)$$

(Die erwartete *maximale* Belastung ist auch nicht groß.)